Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Année Universitaire 2019/2020
SMIA (S1)

Corrigé de l'examen d'algèbre 1

Ex. 1 — Soient a, b, c des ensembles. On pose :

$$(a,b,c)^* = \big\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\big\}.$$

Trouver[1] des ensembles a, b, c, x, y, z, tels que $(a,b,c)^* = (x,y,z)^*$ avec $b \neq y$ et $c \neq z$.

Answer (Ex. 1) — On a

$$(0,0,1)^* = \big\{\{0\},\{0,0\},\{0,0,1\}\big\} = \big\{\{0\},\{0,1\}\big\}$$

et

$$(0,1,0)^* = \big\{\{0\},\{0,1\},\{0,1,0\}\big\} = \big\{\{0\},\{0,1\}\big\}.$$

Ex. 2 — Soit $f : X \to Y$ une application avec $X \neq \varnothing$. Montrer qu'il existe une application $h : Y \to X$ telle que $f \circ h \circ f = f$.
En déduire les résultats du cours : toute application injective (resp. surjective) possède une application inverse à gauche (resp. une application inverse à droite).

Answer (Ex. 2) — La démonstration de la première partie est similaire à celle du résultat du cours : toute application surjective possède une application inverse à droite. On pose $F_y = \{x \mid f(x) = y\}$ pour tout $y \in Y$. Puisque $X \neq \varnothing$, il suffit de définir h sur l'ensemble $f(X)$ (penser aux prolongements). Soit $y \in f(X)$. On a $F_y \neq \varnothing$. On choisit $x_y \in X$ tel que $y = f(x_y)$ (axiome de choix). On pose

$$h(y) = x_y.$$

Pour tout $x \in X$,

$$f(h(f(x))) = f(x_{f(x)}) = f(x).$$

Si f est injective alors $h \circ f = \mathrm{Id}_X$. Si f est surjective alors $f(X) = Y$, d'où $f \circ h = \mathrm{Id}_Y$.

1. La tentative de généraliser la définition de Kuratowski du couple au triplet est infructueuse.

Ex. 3 — Trouver toutes les relations d'équivalence sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2\}$.

Answer (Ex. 3) — Cela revient au même de trouver les partitions de l'ensemble E.

$$E; \quad \Big\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\Big\}; \quad \Big\{\{0\}, \{1, 2\}\Big\}; \quad \Big\{\{1\}; \{0, 2\}\Big\}; \quad \Big\{\{2\}, \{0, 1\}\Big\}.$$

On pose $\Delta = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$. Les relations d'équivalences correspondantes sont :

$$E \times E, \quad \Delta, \quad \Delta \cup \{(1, 2), (2, 1)\}, \quad \Delta \cup \{(0, 2), (2, 0)\}, \quad \Delta \cup \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

Ex. 4 — Soit E un ensemble ordonné. Montrer que

1) Pour tous $x, y \in E$, les relations $x \leq y$ et ($x < y$ ou $x = y$) sont équivalentes.

2) Soient $x, y, z \in E$. On a

$$(x \leq y \text{ et } y < z) \Longrightarrow x < z$$
$$(x < y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x < z.$$

Answer (Ex. 4) — 1) On a

$$\begin{aligned}(x < y \text{ ou } x = y) &\Leftrightarrow (x \leq y \text{ ou } x = y) \text{ et } (x \neq y \text{ ou } x = y)\\ &\Leftrightarrow (x \leq y \text{ ou } x = y) \text{ (car la relation, } R \text{ ou } (\text{non} R), \text{ est toujours vraie)}\\ &\Leftrightarrow x \leq y.\end{aligned}$$

2) On suppose que les relations $x \leq y$, $y < z$ sont vraies. On a $x \leq y$ et $y \leq z$. Donc $x \leq z$.
On suppose que $x = z$, donc $z = x = y$, ce qui contredit $y < z$. D'où $x < z$.
De même on montre l'autre implication.